Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Année Universitaire 2021/2022
SMIA (S1)

Examen d'algèbre 1
Durée 1h30

Ex. 1 — Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble X. Pour tout ensemble Y, $\mathscr{P}(Y)$ désigne l'ensemble des parties de Y.

1) Montrer que
$$\mathscr{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \mathscr{P}(A_i).$$

2) Montrer que
$$\bigcup_{i\in I} \mathscr{P}(A_i) \subset \mathscr{P}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big).$$
Donner un exemple où l'autre inclusion n'est pas vraie.

Ex. 2 — Soient R_1 et R_2 deux relations d'équivalence sur deux ensembles (non vides) E_1 et E_2 respectivement. On définit la relation binaire sur $E_1 \times E_2$:
$$R\{(x_1,x_2),(y_1,y_2)\} \Longleftrightarrow R_1\{x_1,y_1\} \text{ et } R_2\{x_2,y_2\}.$$

a) Montrer que R est une relation d'équivalence. On l'appelle **équivalence produit** de R_1 et R_2, et on la note $R_1 \times R_2$.

b) Soit $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$. Montrer que la classe de (x_1,x_2) modulo R est $\bar{x_1} \times \dot{x_2}$, où $\bar{x_1}$ est la classe de x_1 modulo R_1 et $\dot{x_2}$ est la classe de x_2 modulo R_2.

Ex. 3 — Soient X et Y deux ensembles. On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f : A \to Y$ où $A \subset X$. Pour $f \in \mathscr{F}$, on note $\mathrm{D}(f)$ l'ensemble de définition de f.

1) Montrer que la relation sur $\mathscr{F}$
$$f \leq g \Longleftrightarrow \mathrm{D}(f) \subset \mathrm{D}(g) \text{ et la restriction de } g \text{ à } \mathrm{D}(f) \text{ est } f,$$
est une relation d'ordre. Cet ordre est-il partiel ou total ?

2) Soient $f_1 : A_1 \to Y$ et $f_2 : A_2 \to Y$ deux éléments de $\mathscr{F}$. Montrer que
   a) Pour qu'il existe une application $f : A_1 \cup A_2 \to Y$ prolongeant f_1 et f_2, il faut et il suffit que, pour tout $x \in A_1 \cap A_2$, $f_1(X) = f_2(x)$.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sup(f_1, f_2)$ existe.

3) Généraliser la question 2 à une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{F}$.